Aufgabe 01: Aufnahme einer Substanz ins Blut

Bei der Verabreichung eines bestimmten Medikaments kann die Konzentration der Substanz im Blut (in mg/L) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch die Bateman-Funktion c mit
$c(t) = 20\cdot(e^{-a\cdot t} - e^{-1{,}2\cdot t})$
angegeben werden. Dabei ist a (mit $a \in \mathbb{R}$ und $0 < a < 1{,}2$) ein personenbezogener Parameter und $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Medikaments. Für Felix gilt $a = 0{,}25$

Aufgabenstellungen:

- [x]Geben Sie eine Gleichung (in Abhängigkeit von a) an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt sowie den Wert der maximalen Blutkonzentration bei Felix!
- [x]Geben Sie eine Gleichung an, mit der jener Zeitpunkt bestimmt werden kann, zu dem das Medikament am raschesten abgebaut wird, und bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Konzentration zu diesem Zeitpunkt (bei Felix)!
- [x]Nach etwa 10 Stunden bleibt die momentane Abbaugeschwindigkeit der Blutkonzentration annähernd konstant. Ermitteln Sie jenen Zeitpunkt, zu dem die Substanz bei Felix vollständig abgebaut ist!
- [x]Bei Lena ist der Wert des Parameters a größer als bei Felix. Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, und interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=505&file=Aufnahme_einer_Substanz_ins_Blut.pdf (24.10.17, adaptiert)

Aufgabe 02: Grippeepidemie

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen an dem Grippevirus erkrankt.
2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen erkrankt.
3) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
4) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.

Aufgabenstellungen:

- [x]Drücken Sie alle gegebenen Informationen zur Grippewelle mithilfe von Gleichungen aus und ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von E!
- [x]In welchem Beobachtungszeitraum liefert dieses Modell ein sinnvolles Ergebnis? Geben Sie ein entsprechendes Zeitintervall an und begründen Sie Ihre Aussage!

[x]…Diese Aufgabe war Teil des Stresstests in Wien

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=303&file=Grippeepidemie_-_PK.pdf (24.10.17, adaptiert)

Aufgabe 03: Erlös und Gewinn

Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten.

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1 800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit

$K(x) = 0{,}00077 \cdot x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396 \cdot x + 317\,900$

beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Aufgabenstellungen:

- Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E(x) an, bestimmen Sie die Schnittpunkte dieser Erlösfunktion mit der Kostenfunktion K(x) und interpretieren Sie diese Schnittpunkte im gegebenen Kontext!
- Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge der maximale Gewinn auftritt und bestimmen Sie diesen!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=159&file=Erloes_und_Gewinn.pdf (24.10.17, adaptiert)

Aufgabe 04: Abkühlungsprozess

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm. Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form

$t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden.

Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt t = 0 an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert k = 0,002. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur T(t) in °C.

Aufgabenstellungen:

- Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!
- Der Wert T′(t) kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden. Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T′ an!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=506&file=Abkuehlungsprozess.pdf (24.10.17)

Aufgabe 05: Schiefer Wurf

Ein Objekt wird in einer Höhe von h_0 Metern über dem Boden, einem Abschusswinkel α° (gemessen zur Horizontalen) und mit einer Geschwindigkeit von v_0 Metern/Sekunde abgeworfen. Die Wurfhöhe h(x) (in Metern), die x Meter vom Abwurfpunkt entfernt gemessen wird, kann annähernd (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes) durch die Formel $h(x) = x \cdot \tan\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot cos^2\alpha} + h_0$ berechnet werden. Dabei ist die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81 m/s^2$.

Aufgabenstellungen:

- Ein Objekt wird von einer 1,5m hohen Plattform unter einem Winkel von 40° mit einer Geschwindigkeit von 12m/s abgeworfen.
  Berechnen Sie die Nullstelle/n von h in diesem Fall und deuten Sie diese im gegebenen Kontext!
- Ein zweites Objekt wird ebenso von einer 1,5m hohen Plattform und mit einer Geschwindigkeit von 12m/s abgeworfen, allerdings beträgt der Abwurfwinkel nun 45°.
  Gegeben Sie an, ob das zweite Objekt eine höhere Wurfhöhe als das erste Objekt erreicht und ermitteln Sie die maximale Wurfhöhe!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=143&file=Kugelstossen.pdf (24.10.17, adaptiert)

Aufgabe 06: Saturn-V-Rakete

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.

Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit v(t) (in m/s) einer Saturn-V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion *v* mit

$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$

beschrieben werden.

Aufgabenstellungen:

- Geben Sie eine Gleichung an, mit der die momentane Beschleunigung der Saturn-V-Rakete berechnet werden kann!
- Ermitteln Sie die momentane Beschleunigung der Saturn-V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=499&file=Saturn-V-Rakete.pdf (24.10.17)

Aufgabe 07: Kettenlinie

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form

$$x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit a = 4 beschrieben werden (x und f(x) in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt d = 6 m.

Aufgabenstellungen:

- Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle
- Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen: Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

  Drücken Sie alle gegebenen Informationen von h und f mithilfe von Gleichungen aus und ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=503&file=Kettenlinie.pdf (24.10.17)

Aufgabe 08: Pistenraupen

In einem Skigebiet stehen Pistenraupen mit unterschiedlichen Steigfähigkeiten zur Verfügung. Pistenraupe P_1 bewältigt Steigungen bis zu 95%, Pistenraupe P_2 bis zu 70% und Pistenraupe P_3 bis zu 50%. Das Bergprofil zwischen zwei Bergspitzen A, B kann mithilfe der Funktion *f* mit

$f(x) = -0{,}07x^4 + 0{,}5x^2 + 0{,}2x + 1$ (*x* und *f(x)* in km) modelliert werden.

Aufgabenstellungen:

- Geben Sie an, welche Pistenraupe/n die Auffahrten vom tiefsten Punkt zwischen den Bergspitzen A und B bis zu A bzw. B schaffen!
- Falls die Auffahrt für eine der Pistenraupen P_1, P_2, P_3 nicht schaffbar ist, geben Sie an, bis zu welchem Punkt die Pistenraupe die Auffahrt bewältigen kann!

Quelle: https://www.yumpu.com/de/document/view/21927383/53-von-der-sekantensteigungsfunktion-zur-ableitungsfunktion (24.10.17, adaptiert)

Aufgabe 09: Waldbewirtschaftung

Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt 350 m³ pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von 3,3 % zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen.

Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um 10 m³ pro Hektar (also um 200 m³) verringert.

Aufgabenstellungen:

- [x]Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!
- [x]Geben Sie an, um wie viel m³ pro Hektar man den Holzbestand des 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich höchstens verringern dürfte, damit er am Ende der 15 Jahre auf zumindest 9 500 m³ zugenommen hat!

[x]…Diese Aufgabe war Teil des Stresstests in Wien

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=501&file=Waldbewirtschaftung.pdf (24.10.17)

Aufgabe 10: Stratosphärensprung

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$$

$$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

Aufgabenstellungen:

- Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall [–60 °C; 20 °C] in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

Quelle: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=507&file=Stratosphaerensprung.pdf (24.10.17)
