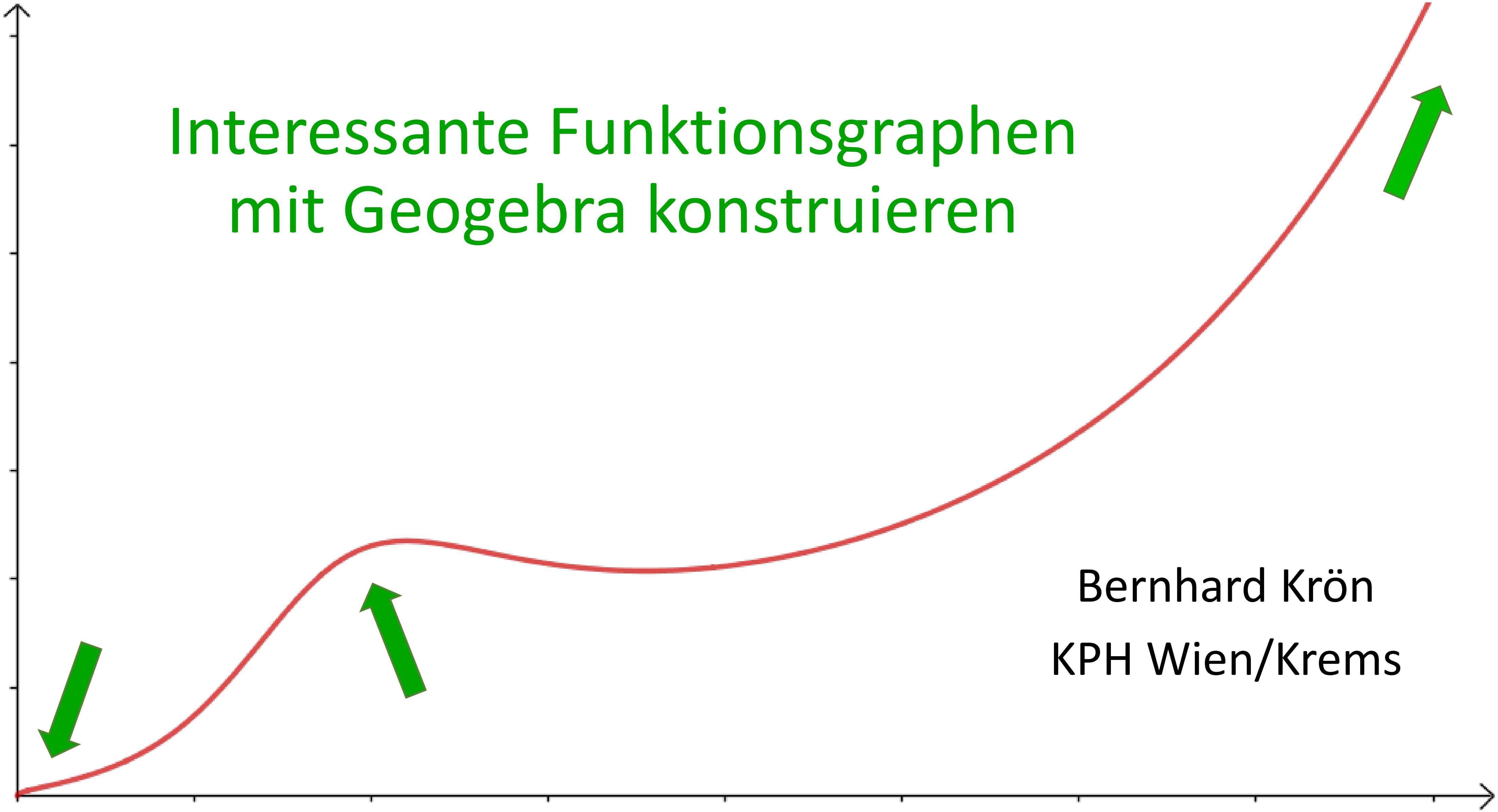
Interessante Funktionsgraphen mit Geogebra konstruieren



Bernhard Krön
KPH Wien/Krems

Inhalt

- Was ist eine (lokale) Extremstelle?
- „Rezepte“ von Schüler/innen zum graphischen Differenzieren
- Elemente zum Konstruieren von Graphen
- Erstellen von Prüfungsaufgaben

Was ist eine (globale) Extremstelle?

Def. Eine Funktion hat in x_0 ein (globales) Minimum, wenn kein Funktionswert kleiner als $f(x_0)$ ist.

Achtung: $f(x_0)$ muss nicht der kleinste Wert sein, es kann auch mehrere Minima geben.

Formal:

Def. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

Die Funktion f hat in x_0 ein (globales) Minimum,

wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.

Was ist eine lokale Extremstelle?

<u>Definition</u>

Die Funktion f hat in x_0 ein lokales Minimum, wenn…

… f in x_0 das Monotonieverhalten ändert (erst fallend, dann steigend).

… es eine Umgebung von x_0 gibt, in der x_0 ein globales Minimum ist.

Was bedeutet das genau?

Was ist eine Umgebung?

Sind diese Definitionen äquivalent?

Was ist eine Umgebung?

Definition: Eine Menge U ist Umgebung von x, wenn es eine offene Menge O gibt, sodass $x \in O \subset U$.

Aber was ist eine offene Menge?

Was ist eine offene Menge?

topologische Räume: offene Mengen axiomatisch definiert.

$\uparrow$

metrische Räume (X, d):

$U_X(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ offene ε-Umgebung von x (Kugel).

$\uparrow$

in $\mathbb{R}$: $U_D(x, \varepsilon) = D \cap (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ offene ε-Umgebung von x in D.

D… Definitionsmenge

offene Menge = Vereinigung von ε-Umgebungen

$$\boxed{U_D(x,\varepsilon) = D \cap (x-\varepsilon; x+\varepsilon)}$$

$D = [0; \infty)$

$U_D(0,\varepsilon) = [0,\varepsilon)$ ist eine offene Umgebung von 0 in D (aber nicht in $\mathbb{R}$).

entscheidend:

Grundmenge $D =$ Definitionsmenge, nicht $\mathbb{R}$!

Was ist eine lokale Extremstelle?

Definition

Die Funktion f hat in x_0 ein lokales Minimum, wenn…

… f in x_0 das Monotonieverhalten ändert (erst fallend, dann steigend).

?

Zusatzdefinition für alle folgenden Funktionen $f(0) := 0$.

- $\cos(1/x)$
- $x \cdot \cos(1/x)$ berührt unendlich oft $y = x$ und $y = -x$.
- $x^2 \cdot \cos(1/x)$ berührt unendlich oft $y = x^2$ und $y = -x^2$ und hat Anleitung $f'(0) = 0$. Differenzialquotient ansehen!
- $x^2 \cdot \cos(1/x) + x^2$ berührt unendlich oft x-Achse.

- $f(x) = x^2 \cdot \cos(1/x) + 2x^2 = x^2(\cos(1/x) + 2)$

f hat lokales Minimum in 0 und $f'(0) = 0$,

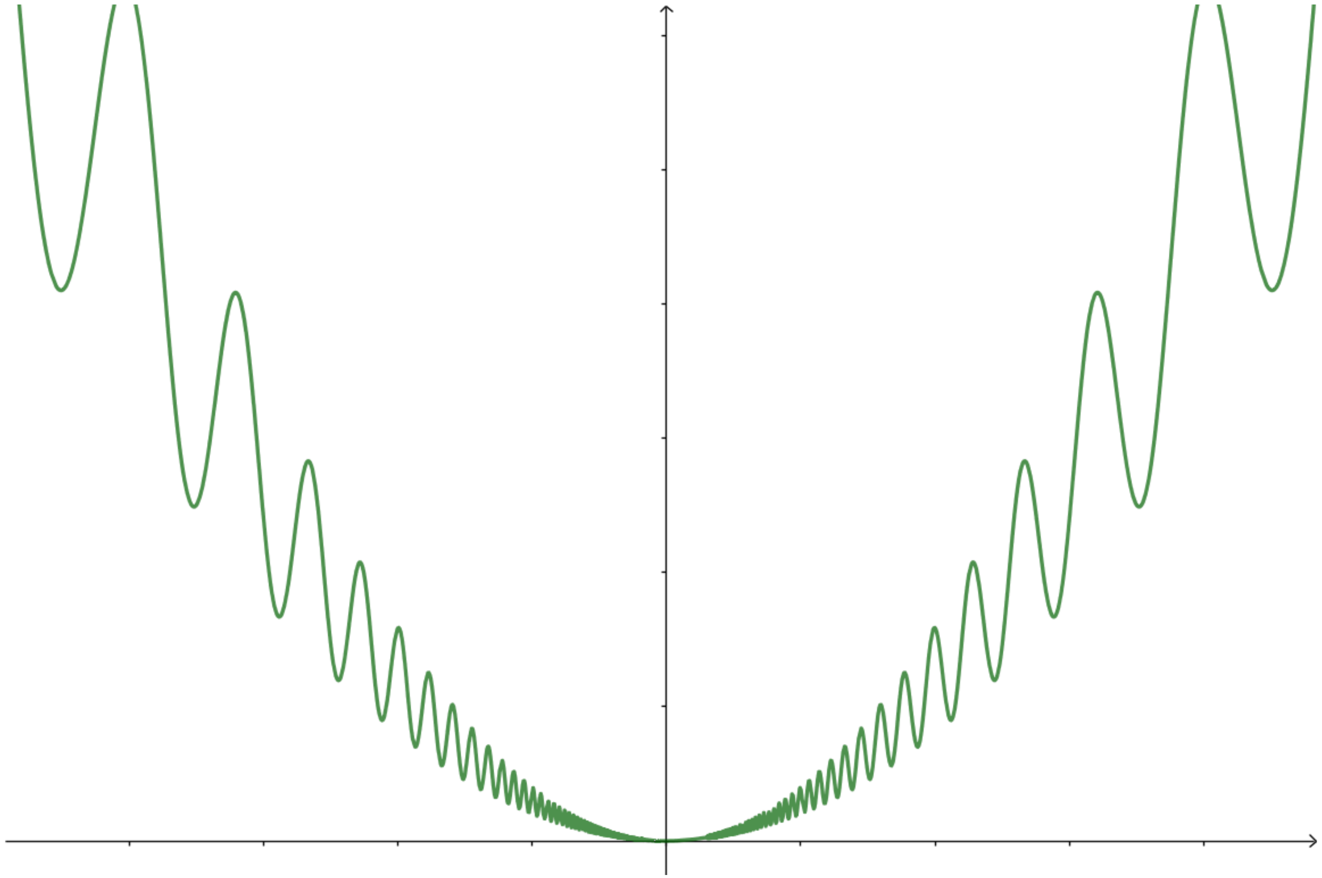
aber kein Monotonieverhalten unmittelbar vor oder nach 0.

bessere Bilder durch

$$f(x) = c \cdot x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) + d\right).$$

Im Bild

$$f(x) = 10 \cdot x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3\right).$$



Die Funktion hat in $x = 0$ keinen Monotoniewechsel.

Formal: Es gibt kein $\varepsilon > 0$, für das f in $(-\varepsilon; 0)$ fallend
oder in $(0;\ \varepsilon)$ steigend wäre.

Lokale Extremstellen können nicht über eine Änderung des Monotonieverhaltens definiert werden.

Änderung des Monotonieverhaltens $\begin{matrix}\Rightarrow \\ \nLeftarrow\end{matrix}$ lokale Extremstelle

Was ist eine lokale Extremstelle?

Definition

Die Funktion f hat in x_0 ein lokales Minimum, wenn…

… es eine Umgebung von x_0 gibt, in der x_0 ein globales Minimum ist.

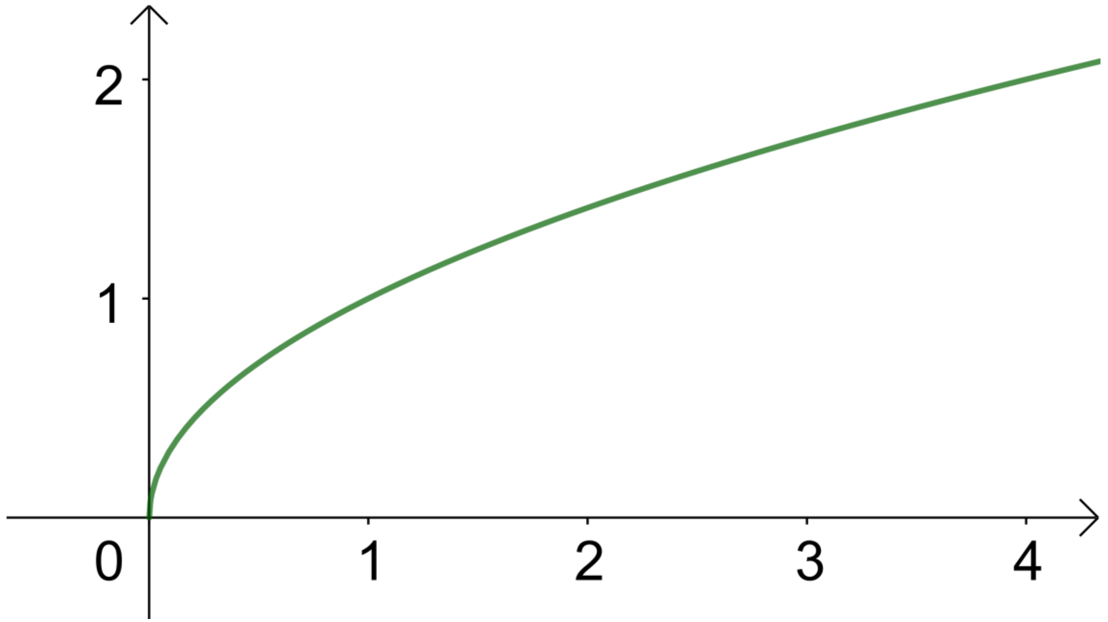
?

Hat $f: [0;\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ein lokales Minimum?

Ist jedes globale Minimum auch ein lokales Minimum?

Die Uni-Mathematik sagt 2x ja.

Die Schulmathematik sagt oft 2x nein.



Schulmathematik akzeptiert oft
nur $(-\varepsilon; \varepsilon)$ als Umgebung von 0.

Unimathematik: $[0; \varepsilon)$ ist offene Umgebung von 0 in
Grundmenge $[0; \infty)$, daher ist 0 lokales Minimum.

Stichwort: Spurtopologie.

$f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x_0 lokales Minimum.

Uni-Mathematik:

Wenn x_0 im Inneren des Intervalls, dann $f'(x_0) = 0$.

Schulmathematik:

Es ist in jedem Fall $f'(x_0) = 0$.

Aufgaben, die das so abfragen, kommen wohl nicht zur Matura (Begutachtung Uni-Fachmathematiker/Innen).

Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

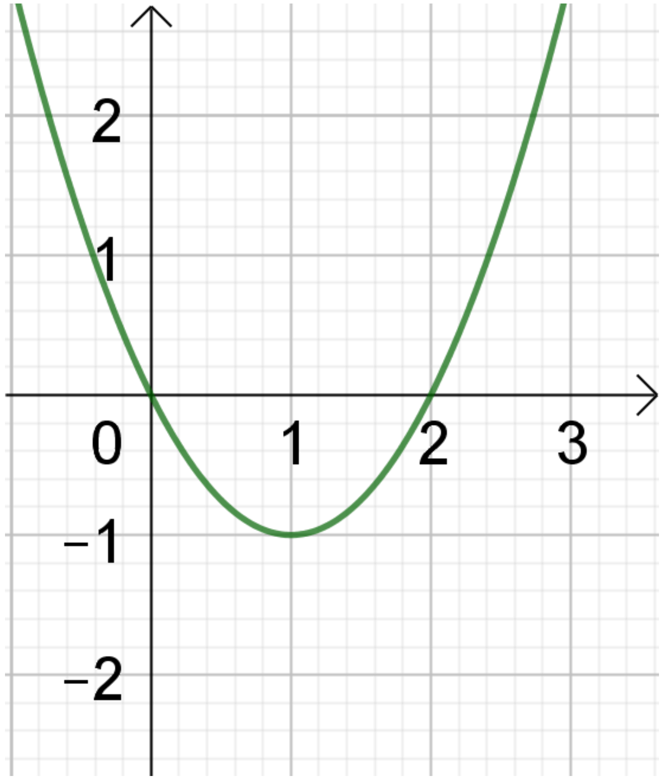
NEW-Regel (nicht nur beim graphischen Differenzieren)
N = Nullstelle, E = Extremstelle, W = Wendestelle

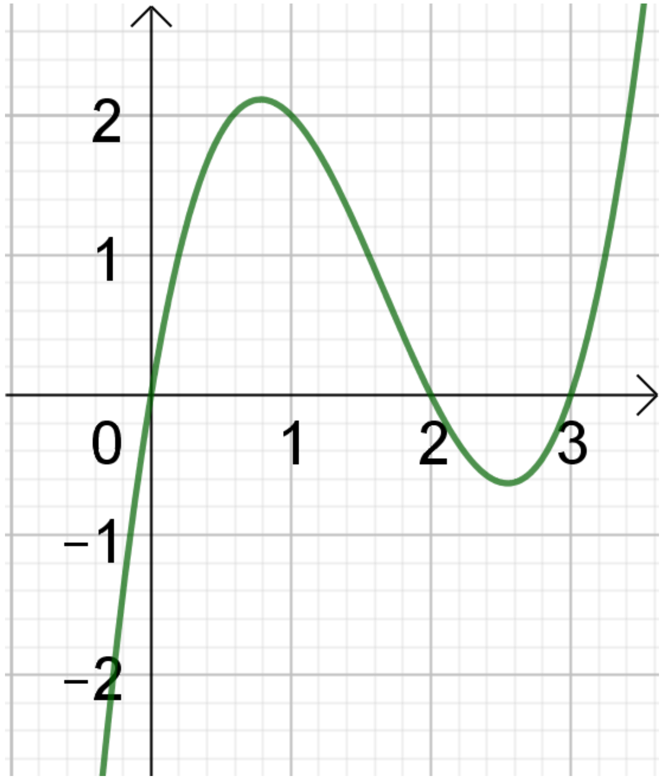
$$\begin{array}{llllll} f: & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{W} & & \\ f': & & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{W} & \\ f'': & & & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{W} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \Downarrow & \not\Uparrow \\ \Downarrow & \not\Uparrow \end{array}$$

Regel OK, aber Richtung der Implikationspfeile beachten.

Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

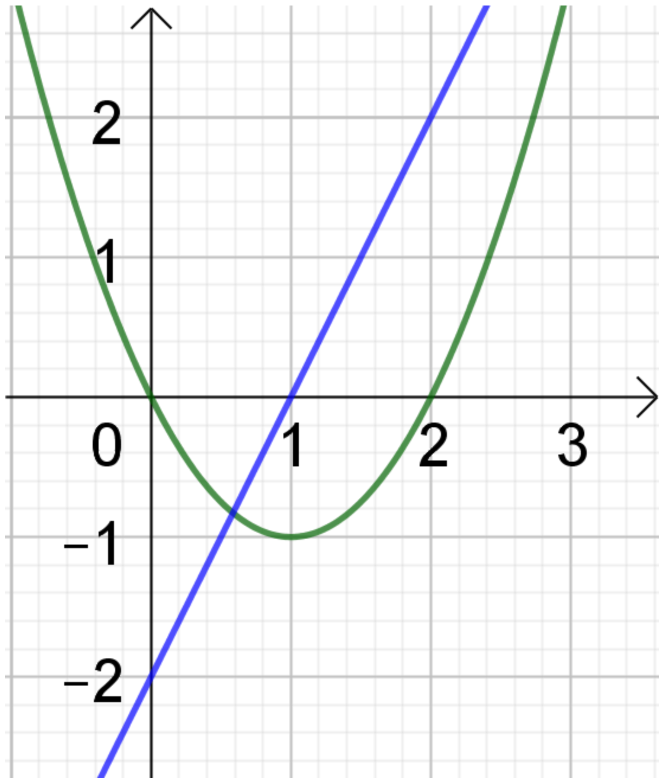
Typ-1-Aufgabe Zuordnungs- od. Konstruktionsformat.
Gegeben Graph von f, wie könnte f' aussehen?

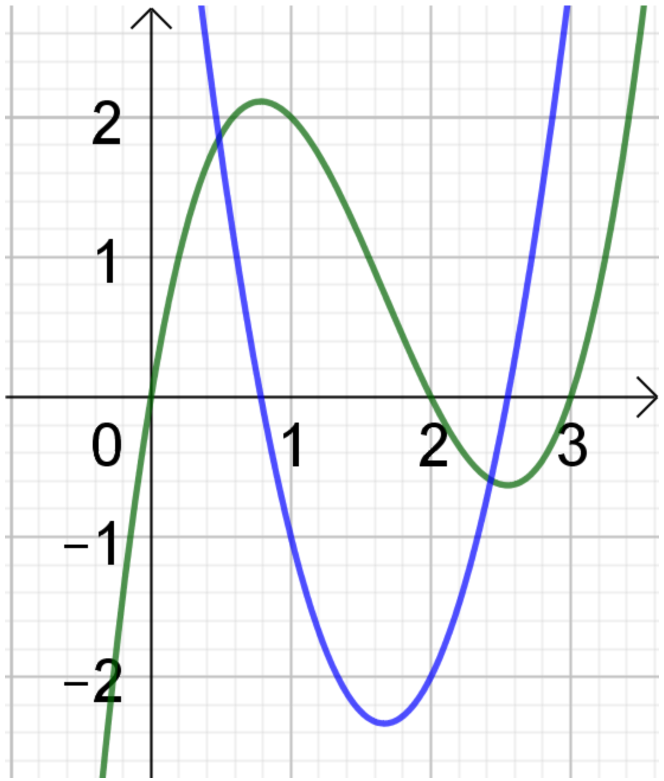




Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

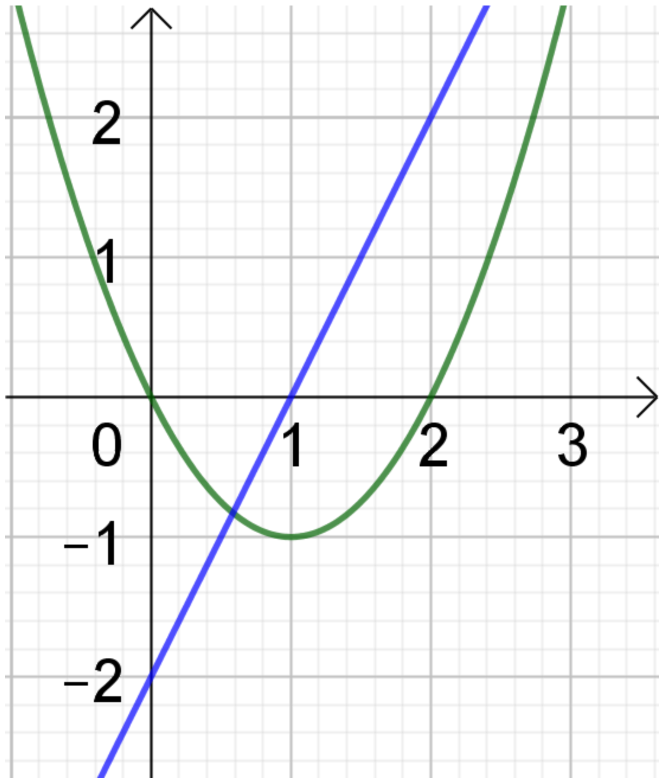
Typ-1-Aufgabe Zuordnungs- od. Konstruktionsformat.
Gegeben Graph von f, wie könnte f' aussehen?

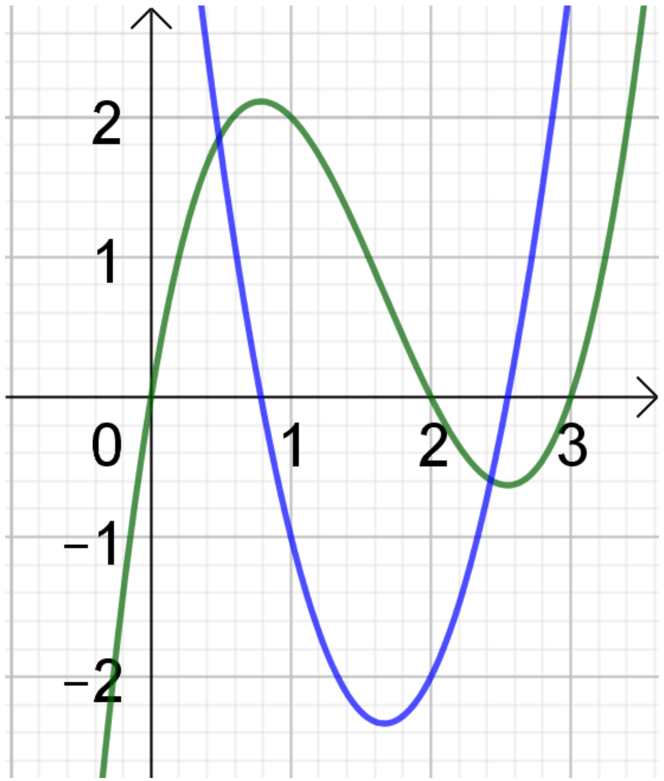




Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

Schüler/innen: NEW-Regel und
„Wenn f von oben kommt, kommt f' von unten (und umgekehrt).“ ?

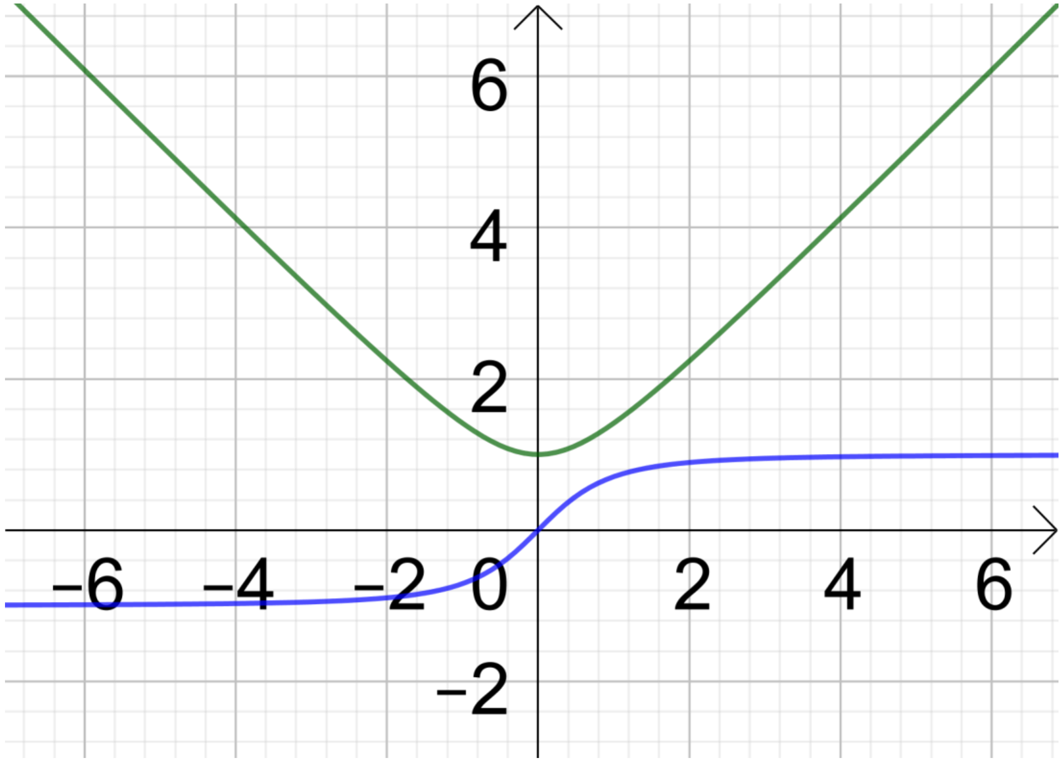


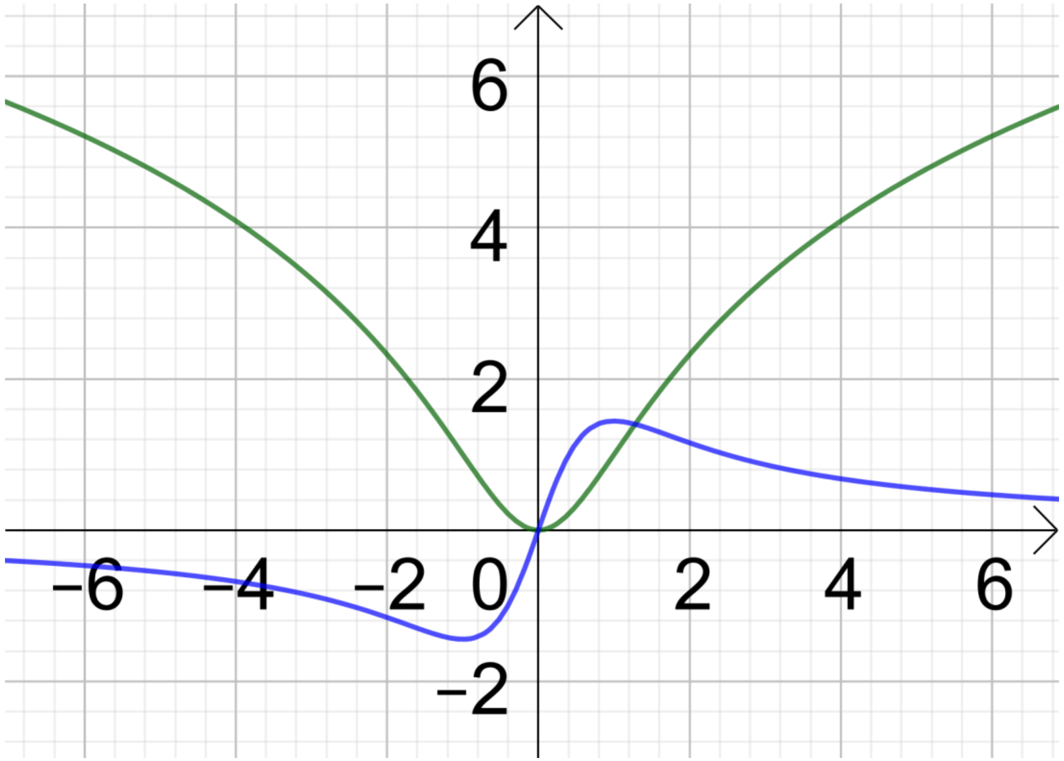


Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

„Wenn f von oben kommt, kommt f' von unten (und umgekehrt).“

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ oder $f(x) = \log_2(x^2+1)$





Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

„Wenn f von oben kommt, kommt f' von unten (und umgekehrt).“ ?

→ gilt für Polynomfunktionen mit Grad ≥ 2, aber nicht allgemein.

Schüler in Nachhilfe: Ich muss nicht wissen, wie das mit der Steigung geht. Es genügt, wenn ich das mit den Regeln mache, weil zur Schularbeit kommen eh keine anderen Beispiele.

Graphisches Differenzieren – „Rezepte“

AN 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können.

AN 3.2 für beliebige Funktionen!
Auch für Typ-2-Aufgaben: Bilder von Graphen beliebiger Funktionen.

Funktionsgraphen konstruieren

$c > 0$

$f(x) + c$	verschiebt $f(x)$ nach oben
$f(x + c)$	verschiebt $f(x)$ nach links
$c \cdot f(x)$	Streckung/Stauchung y–Richtung
$f(c \cdot x)$	Streckung/Stauchung x-Richtung

Bausteine

Im AHS-GKK erwähnte Funktionstypen:

Polynom (insb. linear)

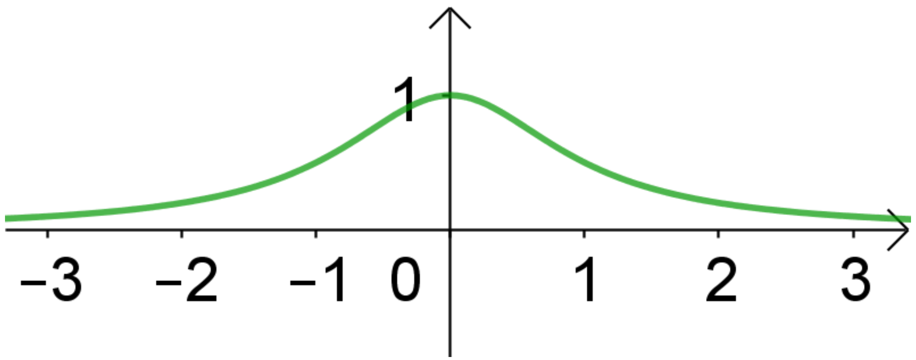
Potenzfunktionen

Exponentialfunktionen

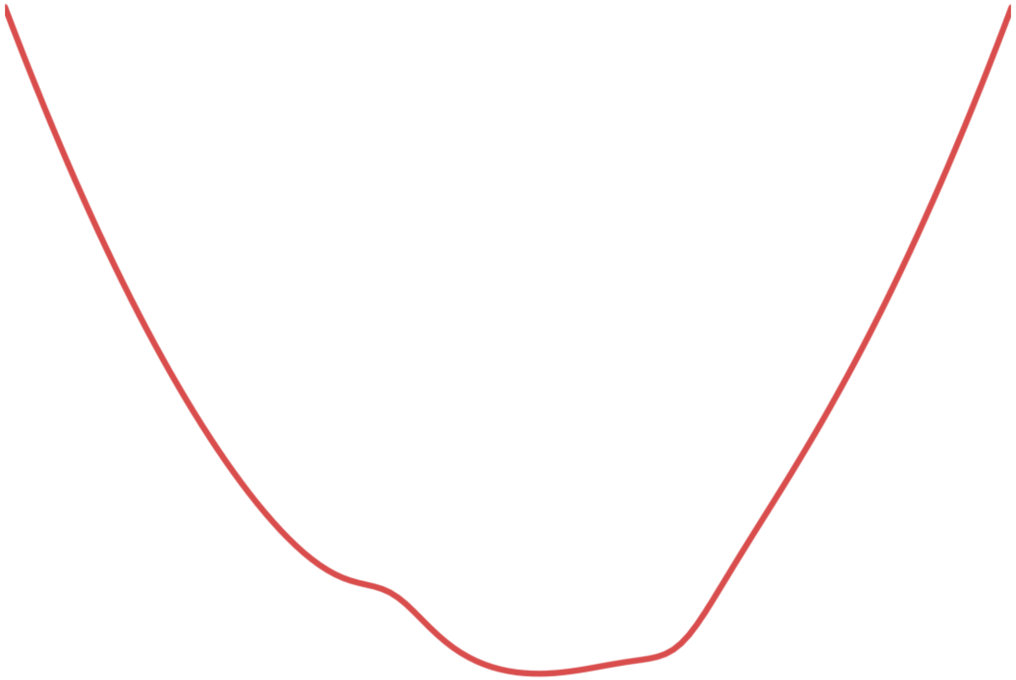
Sinus/Cosinus

Beulen machen

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{„Glocke“}$$



$$f(x) + a \cdot g(x+b)$$

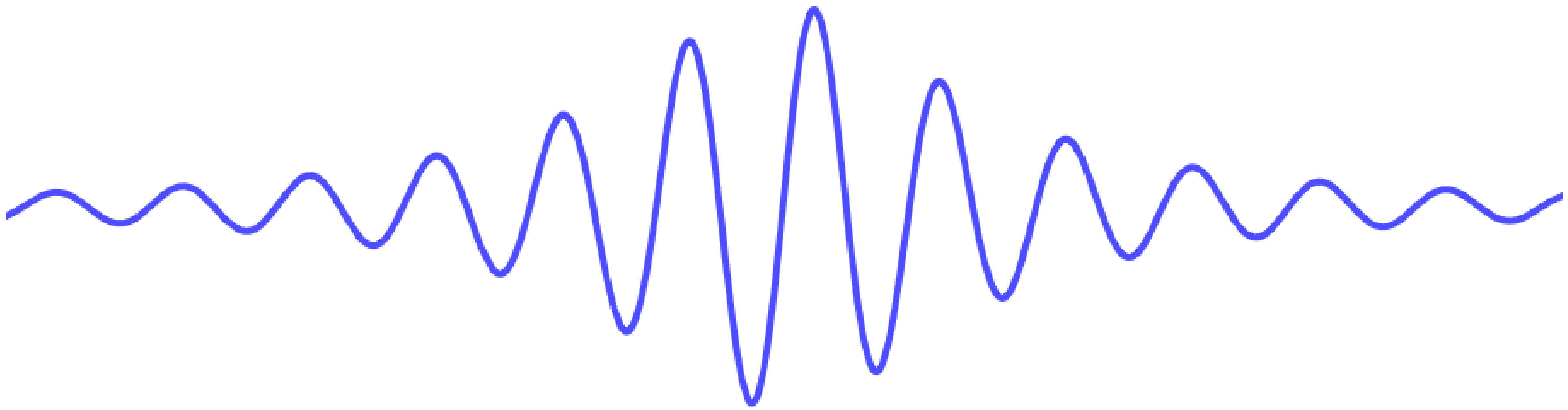


Arbeitsauftrag

Erzeugen Sie eine Parabel mit einer Beule nach unten und einer Beule nach oben. Eventuell Schieberegler für a.

an x-Achse drücken

Multiplikation mit Glocke → drückt Graph im Unendlichen an x-Achse.

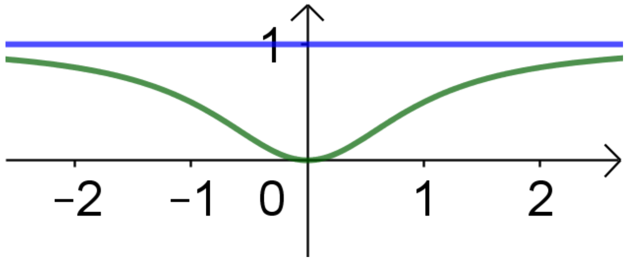


<u>Arbeitsauftrag</u>

Erzeugen Sie ein ähnliches Bild.

in Ursprung zwingen

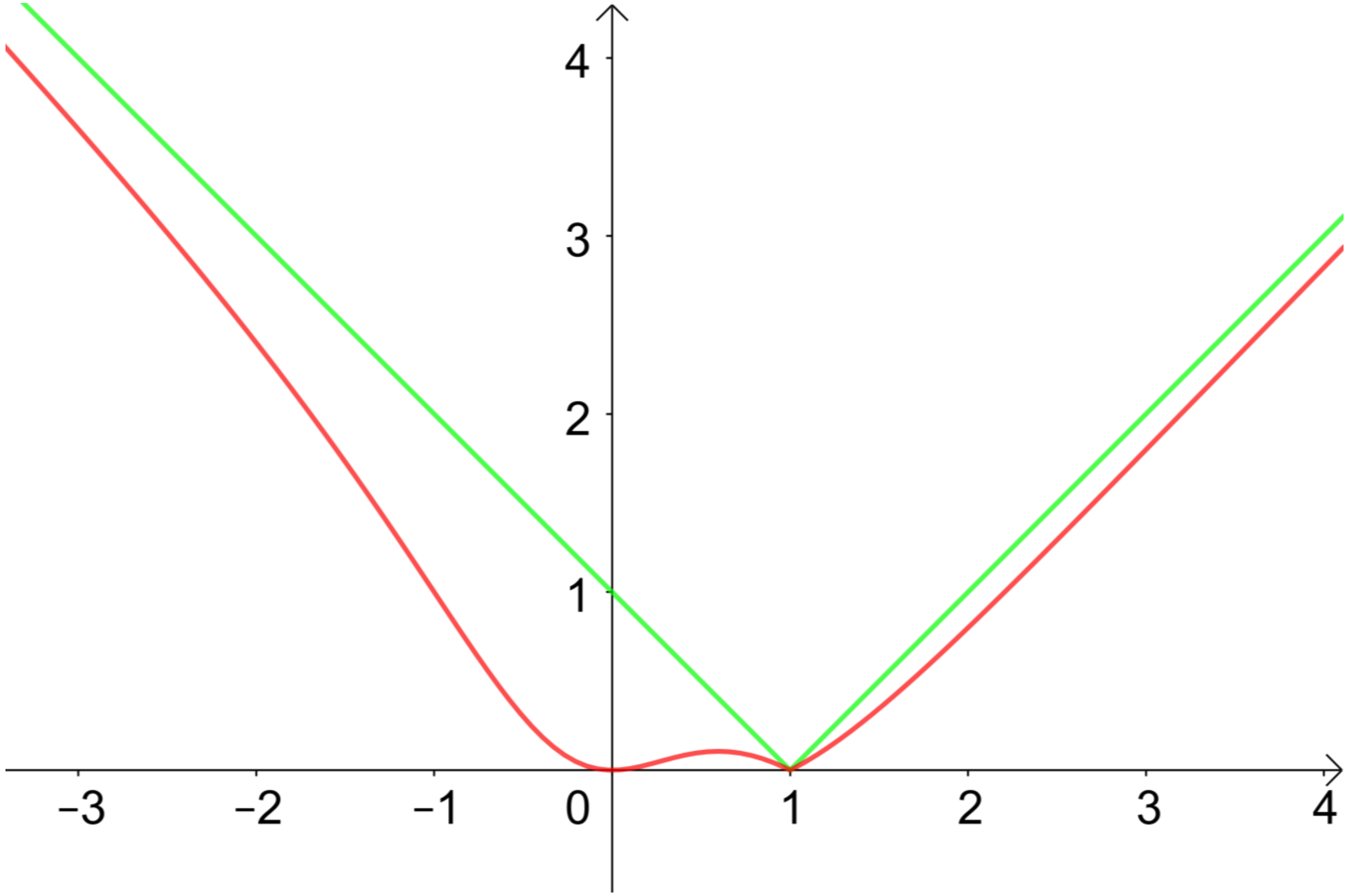
verkehrte Glocke $1 - \frac{1}{1+x^2}$



Multiplikation mit verkehrter Glocke zwingt in Ursprung.

$|x - 1|$

$|x - 1| \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$



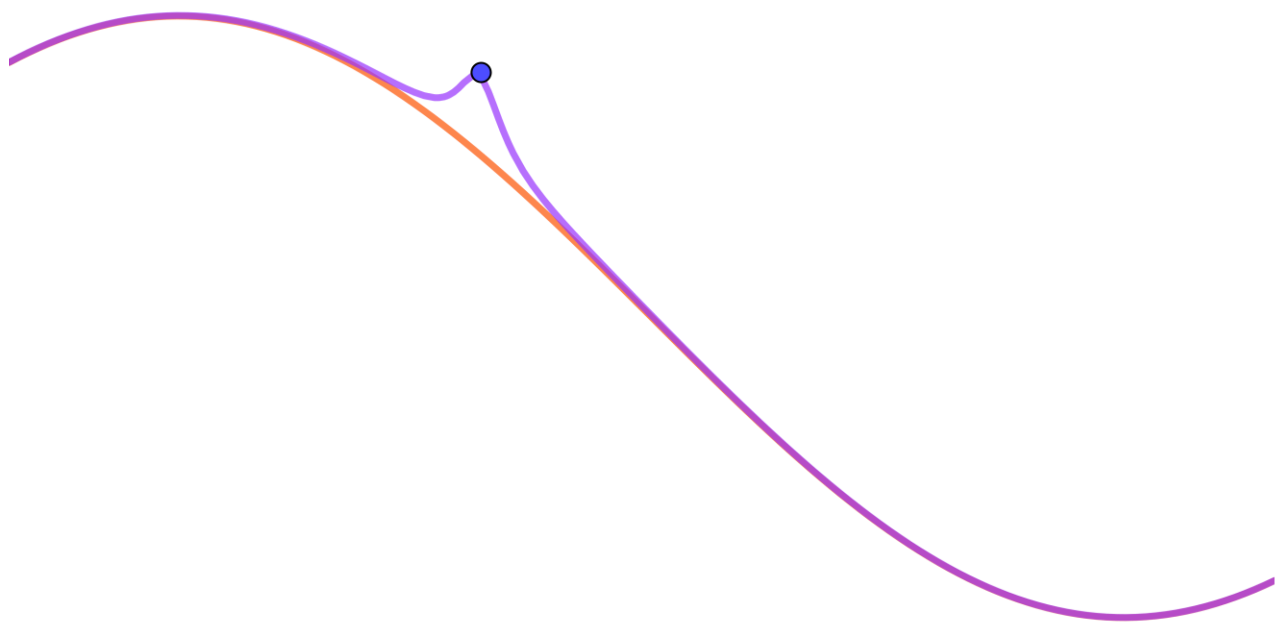
durch Verbeulen in Punkt zwingen

Glocke mit Extrempunkt $(a|b)$ ist $\frac{b}{1+(x-a)^2}$ (2 Schieberegler).

$\cos(x)$ soll Beule hin zum Punkt $(1|0{,}8)$ bekommen.

CAS: $0{,}8-\cos(1)\approx 0{,}2597$

$\cos(x)+\frac{0{,}2597}{1+(x-1)^2}$



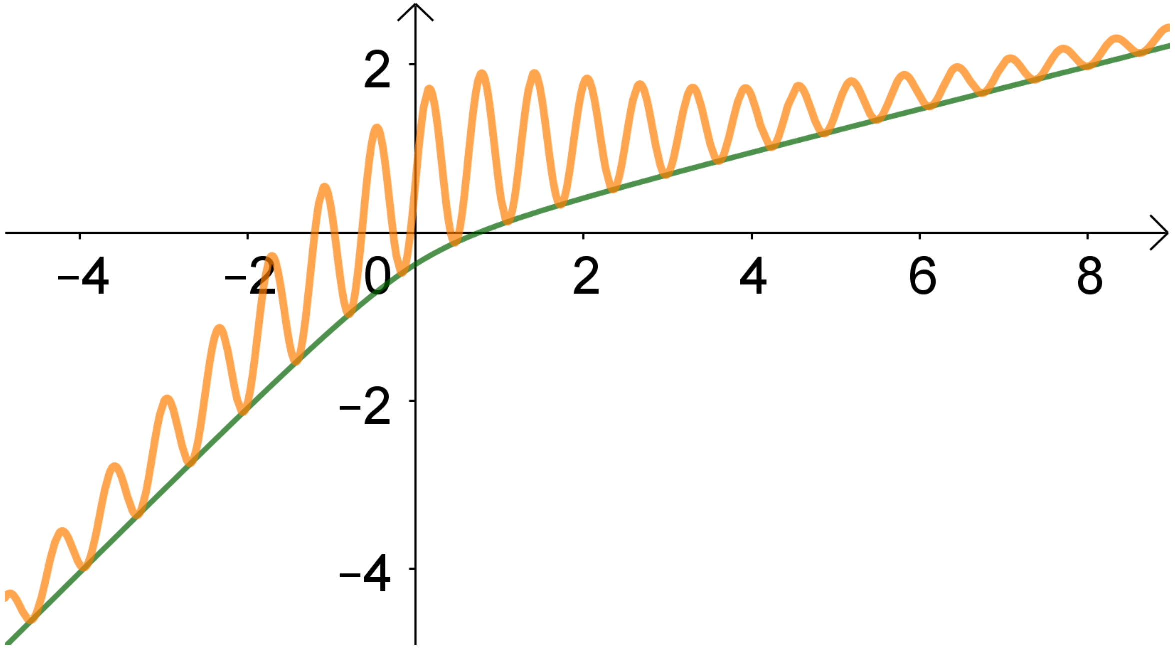
<u>Arbeitsauftrag</u>

Beule spitzer machen.

$\cos(x)+\frac{0{,}2597}{1+c(x-1)^2}$

an Asymptoten zwingen

Betragsfunktion abgerundet $\sqrt{x^2+1}$



Die beiden Seite können an zwei beliebige Geraden durch den Ursprung angenähert werden: $a \cdot \sqrt{x^2+1} + bx$

<u>Arbeitsauftrag</u>

a) Parameter durch Rechnung so wählen, dass Graph die Asymptoten $y = x/4$ in ∞ und $y = x$ in $-\infty$ hat.

b) Beidseitig gedämpfte Schwingung mit diesen Asymptoten.

c) Beidseitig gedämpfte Schwingung, die Asymptoten unendlich oft berührt.

Alternative: stückweise definierte Funktionen

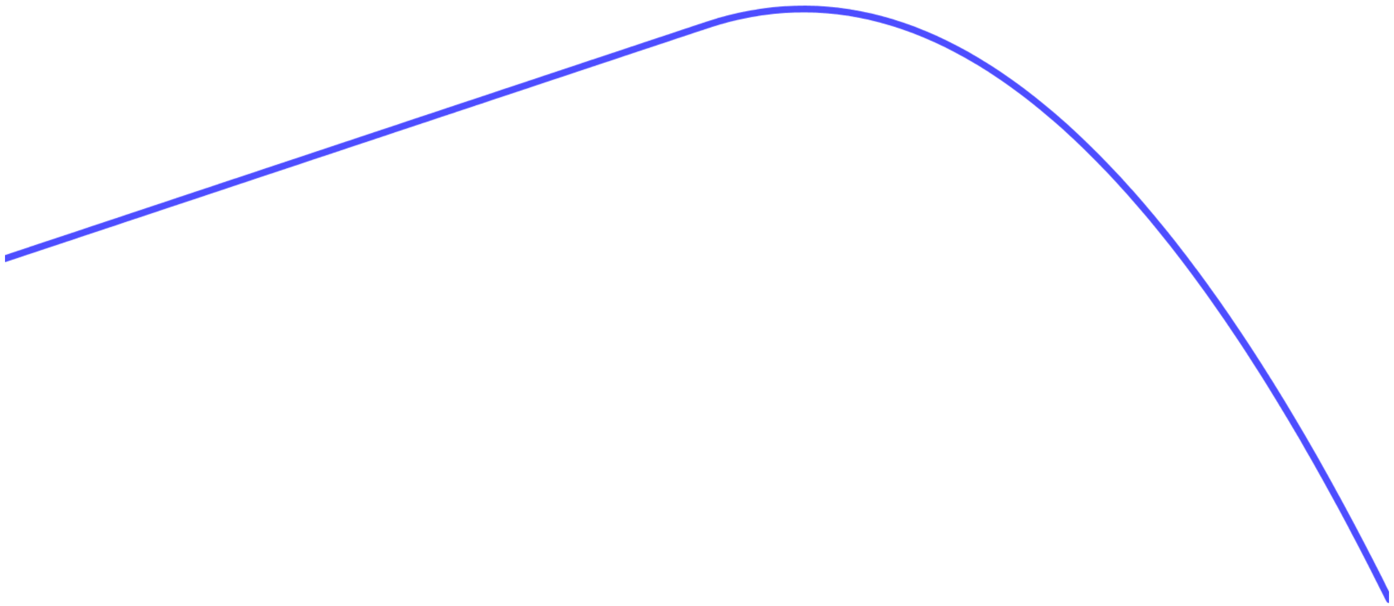
Wenn Knicke vermieden werden sollen, müssen Ableitungen an Übergangsstelle gleich sein vorher → berechnen.

Z.B. Schanze und Flugparabel oder Wasserstrahl aus geradem Rohr:

f(x) = Wenn(x<-1, 1/6+x/3, -1/6*x²)

oft nur 1x differenzierbar

Ableitung hat Knick



Typ-1-Frage erstellen

Angabe blau, Lösung grün, oder umgekehrt, im Zuordnungsformat, eventuell Konstruktionsformat. SRDP-Notationskonvention (z.B. Variablen schräg mit Formelditor) und Achsenbeschriftung beachten. Schriftgröße GGB: 32 od. 48.

Funktionsterm der grünen Funktion:

$a \cdot \sqrt{x^2 + 1} + bx$