

Teiler und Teilbarkeitsregeln

Die natürliche Zahl 12 lässt sich durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6 und 12 ohne Rest dividieren.

Diese Zahlen sind **Teiler** von 12.

Alle Teiler werden in der **Teilmengen** zusammengefasst:

$$T_{12} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$$

12 : 1 = 12 1 ist ein Teiler von 12
 12 : 2 = 6 2 ist ein Teiler von 12
 12 : 3 = 4 3 ist ein Teiler von 12
 12 : 4 = 3 4 ist ein Teiler von 12
 12 : 5 = 2,4
 12 : 6 = 2 6 ist ein Teiler von 12
 12 : 7 = 1,714...
 12 : 8 = 1,5
 12 : 9 = 1,333...
 12 : 10 = 1,2
 12 : 11 = 1,090...
 12 : 12 = 1 12 ist ein Teiler von 12

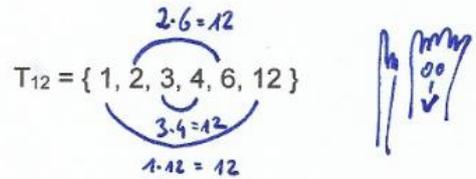
1. Bilde die Teilmengen der folgenden Zahlen!

$$T_{30} =$$

$$T_{20} =$$

$$T_{21} =$$

$$T_{11} =$$



Kontrollmöglichkeit

2. Ergänze die fehlenden Zahlen in den Teilmengen!

$$T_{70} = \{ 1, 2, 5, _, 10, 14, _, 70 \}$$

$$T_{15} = \{ _, 3, _, 15 \}$$

$$T_{36} = \{ 1, 2, _, 4, _, 9, 12, _, 36 \}$$

$$T_{25} = \{ 1, _, _ \}$$

Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist teilbar

- durch **2**, wenn sie eine gerade Zahl ist.
- durch **3**, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
- durch **4**, wenn die letzten beiden Stellen durch 4 teilbar sind.
- durch **5**, wenn die letzte Stelle 0 oder 5 ist.
- durch **6**, wenn sie durch 2 und durch 3 geteilt wird.
- durch **9**, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.

3 teilt 417 ?

$$4 + 1 + 7 = 12$$

3 teilt die Ziffernsumme

⇒ 3 teilt 417

3. Kreuze alle Zahlen an, die 3 als Teiler haben!

621	555	313	273	4005	8116	4000	7002
<input type="checkbox"/>							

4. Kreuze alle Zahlen an, die 9 als Teiler haben!

621	555	313	273	4005	8116	4000	7002
<input type="checkbox"/>							

5. Kreuze alle Zahlen an, die 4 als Teiler haben!

618	720	316	72	86	1014	3080	2932
<input type="checkbox"/>							

6. Kreuze alle Zahlen an, die 6 als Teiler haben!

106	306	108	333	666	528	1016	1242
<input type="checkbox"/>							

7. Gib die Teilmengen an:

$$T_2 = \quad T_3 = \quad T_5 = \quad T_{11} =$$

Zahlen, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben, nennt man **Primzahlen**.
Primzahlen haben immer genau 2 Teiler.

8. Markiere alle Primzahlen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

9. Kreuze alle Primzahlen an!

13	0	2	7	27	333	23	21
<input type="checkbox"/>							

10. Kreuze an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

	richtig	falsch
Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 4 teilbar ist.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 9 teilbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind zwei Zahlen durch eine Zahl a teilbar, dann ist auch die Summe der beiden Zahlen durch a teilbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

11. Kreuze an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

	richtig	falsch
Jede Primzahl hat genau 2 Teiler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
25 ist eine Primzahl, weil sie nur 5 als Teiler hat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das Produkt von zwei Primzahlen ist wieder eine Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 ist die kleinste Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Primfaktorenzerlegungen

Wenn eine natürliche Zahl keine Primzahl ist, so lässt sie sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Man nennt das eine **Primfaktorenzerlegung**.

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

12. Zerlege in Primfaktoren:

$14 =$

$8 =$

$18 =$

$11 =$

$6 =$

$10 =$

$20 =$

$50 =$

Bei größeren Zahlen dividiert man schrittweise durch die größtmögliche Primzahl.

Primfaktorenzerlegung von 90:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

13. Ergänze die Primfaktorenzerlegungen!

270	2		264	2
135				2
45				2
15				3
5				
1			1	

14. Führe Primfaktorenzerlegungen durch!

72		200
----	--	-----

15. Wenn man die Primfaktorenzerlegung einer Zahl kennt, kann man leicht Teiler der Zahl finden.

$$6600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

12 ist ein Teiler von 6600, weil alle Faktoren in der Primfaktorenzerlegung enthalten sind.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

18 ist kein Teiler von 6600, weil in der Primfaktorenzerlegung 3 nur einmal enthalten ist

Zerlege die Zahl 300 in Primfaktoren und begründe damit, dass 300 ein Teiler von 6600 ist!

$300 =$

16. Bilde die Primfaktorenzerlegung der Zahl 480 und gib 3 Teiler an, die größer als 20 sind!

$480 =$

Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

17. Gegeben sind die Teilmengen der Zahlen 48 und 60. Kreuze alle richtigen Antworten an!

$$T_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

3 ist ein Teiler von beiden Zahlen.	<input type="checkbox"/>
5 ist ein Teiler von beiden Zahlen.	<input type="checkbox"/>
3 ist der größte gemeinsame Teiler von beiden Zahlen.	<input type="checkbox"/>
12 ist der größte gemeinsame Teiler von beiden Zahlen.	<input type="checkbox"/>

Bei kleinen Zahlen findet man den **größten gemeinsamen Teiler (ggT)** meist leicht durch Probieren

18. Gib den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen an!

$$\text{ggT} (8, 12) =$$

$$\text{ggT} (20, 30) =$$

$$\text{ggT} (5, 7) =$$

$$\text{ggT} (15, 25) =$$

$$\text{ggT} (18, 9) =$$

$$\text{ggT} (1, 7) =$$

$$\text{ggT} (4, 6) =$$

$$\text{ggT} (15, 20) =$$

$$\text{ggT} (200, 500) =$$

WIE ?	Wie findet man den ggT von größeren Zahlen?																																																	
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">48</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">60</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">30</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">12</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">15</td><td style="padding: 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="padding: 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td></td><td style="border-right: 1px solid black;"></td><td></td></tr> </table>	48	2	60	2	24	2	30	2	12	2	15	3	6	2	5	5	3	3	1		1				<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">48</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">60</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">30</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">12</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">15</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="background-color: #f4a460; padding: 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td></td><td style="border-right: 1px solid black;"></td><td></td></tr> </table>	48	2	60	2	24	2	30	2	12	2	15	3	6	2	5	5	3	3	1		1				$\text{ggT}(48, 60) =$ $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
48	2	60	2																																															
24	2	30	2																																															
12	2	15	3																																															
6	2	5	5																																															
3	3	1																																																
1																																																		
48	2	60	2																																															
24	2	30	2																																															
12	2	15	3																																															
6	2	5	5																																															
3	3	1																																																
1																																																		
Bilde die Primfaktorenzerlegungen	Markiere in den Primfaktorenzerlegungen alle gemeinsamen Faktoren	Multipliziere die gemeinsamen Primfaktoren																																																

19. Ergänze die Vielfachenmengen der Zahlen 12 und 15 um jeweils 3 weitere Zahlen! Gib das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** an!

$$V_{12} = \{ 12, 24, 36, \quad \}$$

$$V_{15} = \{ 15, 30, 45, \quad \} \quad \text{kgV} (12, 15) =$$

Will man das kgV kleiner Zahlen finden, untersucht man der Reihe nach die Vielfachen der größeren Zahl. Das Produkt zweier Zahlen ist immer ein gemeinsames Vielfaches, aber nicht unbedingt das kleinste.

20. Gib das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen an!

$$\text{kgV} (8, 12) =$$

$$\text{kgV} (20, 30) =$$

$$\text{kgV} (5, 7) =$$

$$\text{kgV} (15, 25) =$$

$$\text{kgV} (18, 9) =$$

$$\text{kgV} (1, 7) =$$

$$\text{kgV} (4, 6) =$$

$$\text{kgV} (15, 20) =$$

$$\text{kgV} (200, 500) =$$